

Euklid von Alexandria und die „Elemente“

Die „Elemente“ (griech. Stoicheia) sind in 13 „Bücher“ gegliedert.

- I Anfang eines axiomatischen Aufbaus der ebenen Geometrie bis zur Satzgruppe des Pythagoras, weitgehend Wissen der ionischen Periode (ca. 600 – ca. 450 v. Chr.), insbesondere der Pythagoreer.
- II Grundlagen des algebraischen Operierens mit geometrischen Größen (Strecken, Flächen, Volumina), ebenfalls pythagoreisches Gedankengut.
- III Kreislehre, vermutlich pythagoreisch.
- IV Konstruktion ein- und umbeschriebener regelmäßiger Vielecke.
- V Die Proportionentheorie des Eudoxos in ihrer allgemeinen, d.h. nicht auf geometrische Größen beschränkten Form.
- VI Anwendung der Proportionentheorie auf ebene Geometrie.
- VII - IX
Sätze über natürliche Zahlen.
- X Eine sehr anspruchsvolle algebraische Theorie der mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Größen, insbesondere Klassifikation nach der Zahl der ineinandergeschachtelten Quadratwurzeln, die zu ihrer Erzeugung notwendig sind. Vermutlich auf Theaitetos zurückgehend.
- XI Elementares zur räumlichen Geometrie.
- XII Sätze über Volumina, zum Teil von Eudoxos.
- XIII Konstruktion der fünf regulären Polyeder aus dem Radius der Umkugel (nach Theaitetos), wobei die Ergebnisse von Buch X zur Charakterisierung der jeweiligen Kantenlängen herangezogen werden. Buch XIII schließt mit dem Nachweis, daß es außer den behandelten fünf keine weiteren regulären Polyeder gibt.

Euklid beginnt jedes seiner Bücher mit der **Definition** derjenigen Begriffe, mit denen er darin zu arbeiten hat.

Im ersten Buch werden 23 Definitionen vorangestellt. Wir führen die ersten acht an.

- I. Ein *Punkt* ist, was keine Teile hat.
- II. Eine *Linie* breitenlose Länge.
- III. Die Enden einer Linie sind Punkte.
- IV. Eine *gerade Linie (Strecke)* ist eine solche, die zu den Punkten auf ihr gleichmäßig liegt.
- V. Eine *Fläche* ist, was nur Länge und Breite hat.
- VI. Die Enden einer Fläche sind Linien.
- VII. Eine *ebene* Fläche ist eine solche, die zu den geraden Linien auf ihr gleichmäßig liegt.
- VIII. Ein ebener *Winkel* ist die Neigung zweier Linien in einer Ebene gegeneinander, die einander treffen, ohne einander fortzusetzen.

Im Anschluß an die Definitionen formuliert Euklid **Postulate** und **Axiome**, d. h. Aussagen, die ohne Beweis als gültig angenommen werden.

Postulate

Gefordert soll sein:

- I. Daß man von jedem Punkt nach jedem Punkt die Strecke ziehen kann.
- II. Daß man eine begrenzte gerade Linie zusammenhängend gerade verlängern kann.
- III. Daß man mit jedem Mittelpunkt und Abstand den Kreis ziehen kann.
- IV. Daß alle rechten Winkel einander gleich sind.
- V. Und daß, wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, daß innen auf derselben Seite entstehende Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte werden, dann die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins Unendliche sich treffen auf der Seite, auf der die zwei Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind.

Axiome

- I. Was demselben gleich ist, ist auch einander gleich.
- II. Wenn Gleiches Gleichem hinzugefügt wird, sind die Ganzen gleich.
- III. Wenn von Gleichem Gleiches weggenommen wird, sind die Reste gleich.
- IV. Wenn Ungleichem Gleiches hinzugefügt wird, sind die Ganzen ungleich.
- V. Die Doppelten von demselben sind einander gleich.
- VI. Die Halben von demselben sind einander gleich.
- VII. Was einander deckt, ist einander gleich.
- VIII. Das Ganze ist größer als der Teil.
- IX. Zwei Strecken umfassen keinen Flächenraum.

Axiome: das sind Grundsätze allgemeiner Art, deren Wahrheit unbestreitbar ist

Postulate: das sind theoriespezifische Grundsätze, über deren Zulassung man verschiedener Meinung sein kann.
Bei Euklid betreffen sie im wesentlichen die angenommenen Ausführbarkeit gewisser konstruktiver Grundoperationen, aus denen alle Lösungen von Konstruktionsaufgaben kombiniert werden.

(nach Scriba/Schreiber, S. 51)