

Übungen zur Vorlesung Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie

- 2.1.* Es seien A und B Ereignisse mit den Wahrscheinlichkeiten $P(A) = \frac{3}{4}$ und $P(B) = \frac{1}{3}$. Zeigen Sie, daß $\frac{1}{12} \leq P(A \cap B) \leq \frac{1}{3}$ gilt.
- 2.2.* Geben Sie zu folgenden zufälligen Versuchen jeweils einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum an:
- a) Ein regelmäßiger Würfel wird dreimal geworfen.
 - b) Zwei Kugeln werden auf gut Glück ohne Zurücklegen aus einer Urne mit 2 blauen und zwei roten Kugeln gezogen.
 - c) Eine regelmäßige Münze wird solange geworfen, bis zum ersten Mal Wappen erscheint.
- 2.3. Zeigen Sie, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß genau eines der beiden Ereignisse A und B eintritt, $P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$ beträgt.
- 2.4*. Ein regelmäßiger Würfel wird 7mal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß jede der Ziffern 1 bis 6 unter den Wurfresultaten vorkommt? (Geben Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum an, in dem jeder Ausgang des Experiments dieselbe Wahrscheinlichkeit besitzt.)
- 2.5. Es seien \mathcal{A} eine σ -Algebra von Teilmengen einer Ergebnismenge Ω und B ein Element von \mathcal{A} . Zeigen Sie, daß $\mathcal{A}_B = \{A \cap B : A \in \mathcal{A}\}$ eine σ -Algebra von Teilmengen von B ist.
(\mathcal{A}_B heißt die Spur von \mathcal{A} auf B .)

Kontrollfragen zur Vorlesung

4. Wann nennt man ein System \mathcal{A} von Teilmengen einer Menge Ω eine σ -Algebra? Gehört die leere Menge \emptyset zu jeder σ -Algebra von Teilmengen von Ω ?

5. Es seien $A_k, k = 1, \dots, n$, Ereignisse aus einer σ -Algebra \mathcal{A} . Wie lautet das komplementäre Ereignis \bar{A} zu A : „Mindestens eines der Ereignisse $A_k, k = 1, \dots, n$, tritt ein“? Man stelle A und \bar{A} durch die $A_k, k = 1, \dots, n$, unter Verwendung der Ereignisoperationen $\cup, \cap, \bar{}$ dar.
6. Welchen drei Axiomen genügt eine Wahrscheinlichkeit P auf (Ω, \mathcal{A}) (Ω Menge, \mathcal{A} σ -Algebra von Teilmengen von Ω)?
Wie läßt sich die Gleichung $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ ($A \in \mathcal{A}$) daraus ableiten?