Institut für Mathematik
Prof. Dr. Uwe Küchler
Dipl.-Math. Eva Naumann
Dr. Elke Warmuth

Wintersemester 2000/2001

Übungen zur Vorlesung
Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie

5.1. Es sei X eine Zufallsgröße mit geometrischer Verteilung mit dem Parameter p, $0 < p < 1$.

a) Berechnen Sie die erzeugende Funktion von X.

b) Ermitteln Sie mit Hilfe der erzeugenden Funktion den Erwartungswert und die Varianz von X.

c) Wie groß sind Erwartungswert und Varianz der Zufallsgröße $Y = 3X - 7$?

5.2.* Es seien A und B zwei Ereignisse, für die alle im folgenden auftretenden bedingten Wahrscheinlichkeiten definiert sind.

a) Es gelte $P(A|B) > P(B|A)$. Folgt daraus $P(A) > P(B)$?

b) Gilt $P(A|B) + P(A|\bar{B}) = 1$? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Es gelte $P(A|B) = P(A|\bar{B})$. Zeigen Sie, daß A und B unabhängig sind.

d) A und B seien unabhängig und es gelte $P(A \cup B) = 1$. Zeigen Sie, daß entweder $P(A) = 1$ oder $P(B) = 1$ gilt.

e) Können unvereinbare Ereignisse unabhängig sein? Begründen Sie Ihre Antwort.

5.3. Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $A, B \in \mathcal{A}, \alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Die Zufallsgröße X sei definiert durch $X(\omega) = \alpha \mathbf{1}_A(\omega) + \beta \mathbf{1}_B(\omega), \omega \in \Omega$ mit $\mathbf{1}_C(\omega) = 1$ oder $= 0$, je nachdem, ob $\omega \in C$ oder $\omega \notin C$.
Man berechne die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X, $\mathrm{E}X$, $\mathrm{Var}(X)$.
Was ergibt sich für $\beta = 0$?

5.4.* Ein technisches System besteht aus n parallel geschalteten Bauelementen. Das System arbeitet, solange noch mindestens ein Bauelement arbeitet. Die Bauelemente arbeiten unabhängig voneinander. Jedes Bauelement fällt mit Wahrscheinlichkeit p im betrachteten Zeitraum nicht aus. Ein Bauelement kostet 8 DM. Ein Systemausfall führt zu einem Verlust von 8192 DM. Die Gesamtkosten setzen sich aus den Kosten für die Bauelemente und den eventuellen Kosten für einen Systemausfall zusammen.

a) Bestimmen Sie n in Abhängigkeit von p so, daß die mittleren Gesamtkosten minimal werden.

b) Wie groß ist für $p = 0,5$ das kostengünstigste n?

5.5.* (Bertrandsches Kästchenproblem) In einem Schrank sind drei Schubladen, die jeweils in zwei Hälften, eine linke und eine rechte, unterteilt sind. Diese Hälften lassen sich einzeln öffnen. Eine der Schubladen enthält links und rechts eine Goldmünze, eine andere auf beiden Seiten eine Silbermünze und in der dritten ist auf der einen Seite eine Goldmünze und auf der anderen Seite eine Silbermünze.
Jemand wählt auf gut Glück eine Schublade und von dieser wiederum auf gut Glück eine Seite und öffnet sie.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß er eine Goldmünze darin findet?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß er die gemischte Schublade öffnet?
c) In der geöffneten Hälfte fand er eine Goldmünze vor. Wie sollte er nun die Chancen beurteilen, daß es sich um die gemischte Schublade handelt?

Kontrollfragen zur Vorlesung

13. Wie verändern sich Erwartungswert und Streuung einer reellwertigen Zufallsgröße X bei linearer Transformation von X?

14. Es sei X eine reellwertige Zufallsgröße mit positiver Streuung. Kann dann $E(X^2) = (EX)^2$ gelten?

15. Sind unvereinbare Ereignisse auch unabhängig? Sind unabhängige Ereignisse unvereinbar?