

Übungen zur Vorlesung Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie

- 9.1.* In einem (unendlichen) Bernoulli-Schema mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p sei S_k , $k = 1, 2, \dots$, die Anzahl der Erfolge bis zum k -ten Versuch einschließlich.
- Geben Sie die gemeinsame Verteilung des Vektors (S_1, \dots, S_k) an.
Hinweis: Welche Werte (n_1, \dots, n_k) kann dieser Vektor annehmen?
 - Bestimmen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(S_{k+1} = l | (S_1, \dots, S_k) = (n_1, \dots, n_k))$.
 - Bestimmen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(S_{k+1} = l | S_k = n_k)$.
 - Sind die Zufallsgrößen S_1, \dots, S_k unabhängig?
- 9.2.* Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Wartezeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Erfolgen in einem Bernoulli-Schema.
- 9.3.* Ein Teilchen bewegt sich zufällig auf den ganzzahligen Punkten der Zahlengeraden und befolgt dabei folgende Regeln: Es startet in 0 und geht in jedem Schritt mit Wahrscheinlichkeit p , $0 < p < 1$, eine Einheit nach rechts und mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ eine Einheit nach links. Die Schritte sind unabhängig voneinander. Die Zufallsgröße Y_n gebe seine Position nach n Schritten an.
- Es sei $p = \frac{1}{4}$. Ermitteln Sie die Verteilung von Y_5 und Y_6 .
Welches ist die „durchschnittliche“ Position des Teilchens, wenn man Y_5 bzw. Y_6 sehr oft beobachtet?
 - Mit welcher Wahrscheinlichkeit kehrt das Teilchen innerhalb der ersten 5 Schritte mindestens einmal nach 0 zurück? Für welches p ist diese Rückkehrwahrscheinlichkeit am größten?
- 9.4. Ein Flugzeug habe m Plätze. Alle Plätze werden gebucht. Jeder Passagier nimmt unabhängig von den anderen mit Wahrscheinlichkeit p seine Buchung wahr. Es sei F_m die Anzahl der freibleibenden Plätze. Ermitteln Sie die Verteilung sowie Erwartungswert und Varianz von F_m .

9.5 . In einem Bernoulli-Schema nennt man eine Folge von gleichen Ausgängen (Erfolgen oder Mißerfolgen) einen Run.

Beispiel: 00111010000 beginnt mit einem Run der Länge 2 von Mißerfolgen, dann folgen ein Run der Länge 3 von Erfolgen, ein Run der Länge 1 von Mißerfolgen, ein Run der Länge 1 von Erfolgen und schließlich ein Run der Länge 4 von Mißerfolgen. Es bezeichne X die Länge des ersten Runs und Y die Länge des zweiten Runs in einem Bernoulli-Schema.

- a) Ermitteln Sie die Verteilung und den Erwartungswert von X und von Y .
- b) Ermitteln Sie die gemeinsame Verteilung von X und Y . Sind X und Y unabhängig?

Kontrollfragen zur Vorlesung

25. Welche Eigenschaft zeichnet die geometrische Verteilung gegenüber anderen Verteilungen auf $\{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$ aus?
26. Was versteht man unter einem Bernoulli-Schema?
Welche Wahrscheinlichkeitsverteilung hat die Anzahl $n - S_n$ der Mißerfolge im Bernoulli-Schema mit den Parametern (n, p) ?
27. Welche Zufallsgrößen treten im Zusammenhang mit Bernoulli-Schemata auf? Welche Wahrscheinlichkeitsverteilungen besitzen sie?