

Übungen zur Vorlesung Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie

- 10.1. Eine Arzneimittelfirma gibt an, dass bei einem Impfstoff die Wahrscheinlichkeit für eine leichte Komplikation 0,005 beträgt. Bei 1000 Impfungen wurden in neun Fällen Unverträglichkeiten beobachtet.
Spricht diese Beobachtung gegen die Angabe der Arzneimittelfirma?
Berechnen Sie dazu die Wahrscheinlichkeit, dass bei mindestens 9 von 1000 geimpften Patienten Unverträglichkeiten beobachtet werden.

- 10.2.* Mit X_n wird die Anzahl der in einer Serie von n unabhängigen Würfeln mit einem Würfel auftretenden Würfe mit der Augenzahl Sechs bezeichnet. Ermitteln Sie eine Anzahl n_0 von unabhängigen Würfeln, so dass

$$P\left(\left|\frac{X_{n_0}}{n_0} - \frac{1}{6}\right| \leq 0,01\right) \geq 0,5$$

gilt, sowohl mit Hilfe der Tschebyscheffschen Ungleichung als auch mittels des zentralen Grenzwertsatzes (in der Form des Satzes von Moivre-Laplace).

- 10.3.* Es sei S_n binomialverteilt mit den Parametern n und p .

- a) Wie groß ist für große n näherungsweise die Wahrscheinlichkeit der sogenannten $k\sigma$ -Intervalle:

$$\left[np - k\sqrt{np(1-p)}, np + k\sqrt{np(1-p)} \right] = [np - k\sigma, np + k\sigma], k = 1, 2, 3?$$

- b) Diskutieren Sie die Länge der $k\sigma$ -Intervalle in Abhängigkeit von p .

- c) Geben Sie die $k\sigma$ -Intervalle für die folgenden Binomialverteilungen an:

$$B(200; 0,1), B(200; 0,25), B(200; 0,5), B(100; 0,25), B(500; 0,25), B(5000; 0,25).$$

- 10.4. Beweisen Sie mit Hilfe des Grenzwertsatzes von Moivre-Laplace das schwache Gesetz der großen Zahlen von Bernoulli: Es sei S_n binomialverteilt mit den Parametern n und p und ϵ sei eine beliebige positive reelle Zahl. Dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \epsilon\right) = 0.$$

- 10.5.* Ein Hotel hat 200 Betten. Wie viele Reservierungen darf der Hotelmanager akzeptieren, wenn erfahrungsgemäß eine Reservierung mit Wahrscheinlichkeit 0,2 annulliert wird, und die Wahrscheinlichkeit einer Überbuchung höchstens 0,025 sein soll? Benutzen Sie die Normalapproximation. Welche Modellannahmen haben Sie getroffen?

Kontrollfragen zur Vorlesung

28. Wie lautet der Poissonsche Grenzwertsatz? Wie kann man ihn anwenden?
29. Wie sind Dichte und Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung definiert? Welche Eigenschaften haben sie? Welche Zusammenhänge bestehen zwischen ihnen?
30. Wie lauten der lokale und der globale zentrale Grenzwertsatz von Moivre-Laplace? Welche typischen Anwendungsfälle für den globalen zentralen Grenzwertsatz kennen Sie?