

Übungen zur Vorlesung Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie

- 12.1.* a) Die Zufallsgröße X sei normalverteilt mit den Parametern μ und σ^2 . Berechnen Sie die Dichte der Zufallsgröße $Y = e^X$.
- b) Die Zufallsgröße X sei gleichmäßig auf dem Intervall $[-1, 1]$ verteilt, man bestimme die Dichte von $Y = X^2$.
- 12.2. Berechnen Sie das erste und zweite Moment einer mit dem Parameter λ exponentialverteilten Zufallsgröße.
- 12.3.* Der zufällige Vektor (X, Y) sei gleichmäßig verteilt auf der Menge

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}.$$

Man bestimme die Verteilungsfunktionen von X und Y .
Sind X und Y stochastisch unabhängig?

- 12.4. T_1 und T_2 seien zwei unabhängige, mit den Parametern λ_1 bzw. λ_2 exponentialverteilte Zufallsgrößen.
Man bestimme die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $T = \min(T_1, T_2)$.
- 12.5.* In einem radioaktiven Präparat zerfällt jedes Atom unabhängig von allen anderen Atomen zu einem zufälligen Zeitpunkt, der exponentialverteilt ist mit einem Parameter $\lambda > 0$.
Es sei $N(t)$ die Anzahl der bis zur Zeit $t > 0$ nicht zerfallenen Atome, wenn zur Zeit 0 genau N_0 Atome vorhanden waren.

- a) Man berechne die mittlere Anzahl der Atome, die bis zur Zeit $t > 0$ nicht zerfallen sind, in Abhängigkeit von n_0 und λ . Nach welcher Zeit t_m ist im Mittel die Hälfte des Präparates zerfallen? Diese Zeit nennt man die Halbwertszeit.
- b) Wie groß ist die Varianz von $\frac{N(t)}{N_0}$?
- c) Plutonium hat eine Halbwertszeit von 24000 Jahren. Geben Sie die Verteilungsfunktion der Lebensdauer eines radioaktiven Kerns an und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der ein solcher Kern innerhalb von zwei (zwanzig) Jahrtausenden zerfällt.

Kontrollfragen zur Vorlesung

34. Wann ist eine reellwertige Zufallsgröße X stetig verteilt?
Welche Eigenschaften hat die Wahrscheinlichkeitsdichte von X ?
35. Welche Bedeutung haben die Sprunghöhen $F_X(x) - F_X(x-0)$ der Verteilungsfunktion F_X einer Zufallsgröße X ?
Welche Wahrscheinlichkeiten geben die Differenzen $F_X(b) - F_X(a)$ an?
36. Wie sind die Momente einer stetig verteilten Zufallsgröße X definiert?