

## Übungen zur Vorlesung Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie

- 3.1. In einer Produktionsserie sind 5% der Erzeugnisse fehlerhaft. Auf dem Prüfstand werden 98% der fehlerhaften Erzeugnisse entdeckt, aber auch 2% der fehlerfreien Erzeugnisse werden als fehlerhaft ausgesondert. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein Erzeugnis ausgesondert? Wie groß ist der Anteil der irrtümlich ausgesonderten Erzeugnisse an allen ausgesonderten Erzeugnissen? Wie beurteilen Sie das Prüfverfahren?
- 3.2. Gegeben sind  $2n$  Kugeln, davon die Hälfte weiß und die Hälfte schwarz. Sie sollen die Kugeln auf zwei Urnen verteilen, so daß keine Urne leer bleibt. Danach wird ein Spieler eine Urne zufällig auswählen und aus dieser Urne auf gut Glück eine Kugel ziehen. Wie müssen Sie die Kugeln verteilen, damit für den Spieler die Wahrscheinlichkeit, eine weiße Kugel zu ziehen, maximal ist?
- 3.3. Eine unter  $10^6$  Münzen hat "Zahl" auf beiden Seiten, die übrigen sind "gut". Eine Münze wird zufällig aus den  $10^6$  Münzen ausgewählt und 20mal geworfen. Es fällt 20mal Zahl. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine gute Münze ausgewählt wurde? Was sagt die Intuition dazu?
- 3.4. Polyasches Urnenschema. In einer Urne sind  $r$  rote und  $s$  schwarze Kugeln. Es wird eine Kugel zufällig gezogen und diese und  $c$  Kugeln derselben Farbe in die Urne zurückgelegt. Dieser Vorgang wird 3mal durchgeführt. Es sei  $X$  die Anzahl der roten Kugeln, die sich danach in der Urne befinden. Bestimmen Sie die Verteilung von  $X$ . Welchen Vorgang beschreiben die Fälle  $c = 0$  bzw.  $c = -1$ ?
- 3.5. Es seien  $A$  und  $B$  zwei Ereignisse, für die alle im folgenden auftretenden bedingten Wahrscheinlichkeiten definiert sind.  
a) Es gelte  $P(A|B) > P(B|A)$ . Folgt daraus  $P(A) > P(B)$ ?  
b) Gilt  $P(A|B) + P(A|\bar{B}) = 1$ ?  
Begründen Sie Ihre Antworten.
- 3.6. Auf einer Ausstellung sind von 12 Gemälden 10 Originale. Ein Besucher wählt zufällig ein Bild aus, befragt aber, bevor er es kauft, einen Experten nach dessen Meinung. Dieser gibt im Mittel bei 9 von 10 Werken eine richtige Beurteilung ab, unabhängig davon, ob das vorgelegte Bild ein Original oder eine Fälschung ist. Wenn der Experte entscheidet, daß das Bild eine Fälschung sei, gibt der Besucher das Bild zurück und wählt ein anderes. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist dieses dann ein Original?
- 3.7. Eine Zufallsgröße  $X$  sei geometrisch verteilt, d.h.  $P(X = k) = (1 - p)^k p$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  mit  $0 < p < 1$ . Zeigen Sie, daß dann gilt  $P(X \geq m + n | X \geq n) = P(X \geq m)$ . Diese Eigenschaft bezeichnet man als Gedächtnislosigkeit der geometrischen Verteilung.
- 3.8. In einer Hand befinden sich 5 Lose: 1 Gewinn und 4 Nieten. Sie sollen von 5 Kindern nacheinander gezogen werden. Die Kinder können sich über die Reihenfolge nicht einigen. Ist der Streit berechtigt?
- 3.9. Ein Würfel wird dreimal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens eine 3 fällt, gegeben mindestens einer der Würfe ist eine 6?
- 3.10. Eine zufällige Anzahl  $X$  von guten Münzen wird geworfen. Die Verteilung von  $X$  ist eine Gleichverteilung auf der Menge  $\{1, 2, 3\}$ . Es sei  $W$  die Anzahl von Wappen, die dabei fallen. Bestimmen Sie die Verteilung von  $W$ .