Institut für Mathematik
Dr. Elke Warmuth
Dr. Evelyn Buckwar; Dipl.-Math. Jan Johannes

Wintersemester 2001/2002

Übungen zur Vorlesung Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie

4.1. Es seien A und B zwei unabhängige Ereignisse in einem gegebenem Wahrscheinlichkeitsraum mit $P(A) = \frac{1}{3}$ und $P(B) = \frac{3}{4}$. Berechnen Sie $P(A \cup B), P(A|A \cup B)$ und $P(B|A \cup B)$.

4.2. Es seien A, B und C drei unabhängige Ereignisse. Beweisen Sie, dass dann auch die Ereignisse $\bar{A}, \bar{B}$ und $\bar{C}$ unabhängig sind.

4.3. Es sei $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), P)$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum. Weiter seien $A, B, C \in \mathfrak{P}(\Omega)$ mit $P(B) > 0$ und $P(C) > 0$. Beweisen Sie: Wenn B und C unabhängig sind, dann gilt
$P(A|B) = P(A|B \cap C)P(C) + P(A|B \cap \bar{C})P(\bar{C})$.

4.4. Bei Zwillingen seien mit Wahrscheinlichkeit a beide Jungen, mit Wahrscheinlichkeit b beide Mädchen. Sind die Zwillinge verschiedenen Geschlechts, so wird mit Wahrscheinlichkeit 0,5 zuerst der Junge geboren. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der zweite Zwilling ein Mädchen ist, wenn der erste Zwilling ein Mädchen war?

4.5. Eine Krankheit kommt bei ca. 0,5% der Bevölkerung vor. Ein Test zur Auffindung der Krankheit führt bei 99% der Kranken aber auch bei 2% der Gesunden zu einer positiven Reaktion. Welcher Anteil der positiv getesteten Personen ist gesund? Welcher Anteil der negativ getesteten Personen ist krank?

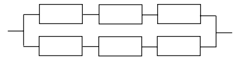
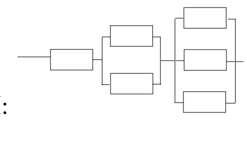
4.6. Es seien A_1, A_2 und A_3 unabhängige Ereignisse mit $P(A_i) = p_i$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit p dafür, dass keins dieser Ereignisse eintritt.
Zeigen Sie außerdem: $p \leq \exp(-(p_1 + p_2 + p_3))$.

4.7. a) Wie viele Bauelemente mit der Zuverlässigkeit 0,4 müßte man parallelschalten, damit die Zuverlässigkeit des Systems mindestens 0,99 beträgt?
b) Wie viele Bauelemente mit der Zuverlässigkeit 0,99 (0,95) können höchstens in eine Reihe geschaltet werden, wenn die Zuverlässigkeit des Systems 0,9 nicht unterschreiten soll?

4.8. a) Es gelte $P(A|B) = P(A|\overline{B})$. Zeigen Sie, dass A und B unabhängig sind.
b) A und B seien unabhängig und es gelte $P(A \cup B) = 1$. Zeigen Sie, dass $P(A) = 1$ oder $P(B) = 1$ gilt.
c) Es gelte $P(A) \in \{0, 1\}$. Zeigen Sie, dass A unabhängig von jedem beliebigen Ereignis B ist.

4.9. Ein regelmäßiger Würfel wird 3 mal geworfen. Es sei $A_{i,j}$ das Ereignis, dass der $i$te und der $j$te Wurf dieselbe Zahl ergeben. Zeigen Sie, dass die Ereignisse $A_{i,j}, 1 \leq i < j \leq 3$ paarweise unabhängig, aber nicht vollständig unabhängig sind.
Kann man dieses Ergebnis auf n Würfe verallgemeinern?

4.10. Berechnen Sie die Zuverlässigkeit der beiden folgenden Systeme, in denen alle Bauelemente die gleiche Zuverlässigkeit p besitzen!

System I:  System II: 

Für welche p ist die Zuverlässigkeit des Systems II größer als die Zuverlässigkeit des Systems I?