Institut für Mathematik
Dr. Elke Warmuth
Dr. Evelyn Buckwar; Dipl.-Math. Jan Johannes

Wintersemester 2001/2002

Übungen zur Vorlesung Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie

10.1. Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein beliebiger Wahrscheinlichkeitsraum. Weiter sei A_n eine monoton fallende Folge von Ereignissen mit $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A$.
Beweisen Sie: $P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$.

10.2. Es sei F die Verteilungsfunktion einer Verteilung P auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$. Beweisen Sie, dass F monoton wachsend ist und dass
$\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ und $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$
gilt.

10.3. Skizzieren Sie den Graphen der Verteilungsfunktion folgender Verteilungen:
a) Gleichverteilung auf $\{1, 2, ..., 6\}$ b) Binomialverteilung mit $n = 5$ und $p = 0,3$. .

10.4. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion einer Exponentialverteilung mit dem Parameter λ. Berechnen Sie für diese Verteilung die Wahrscheinlichkeiten der Intervalle $[0, \frac{1}{\lambda}]$, $[0, \frac{2}{\lambda}]$ und $[0, \frac{3}{\lambda}]$.

10.5. Bestimmen Sie die Konstante c so, dass die Funktion f eine Dichte ist:

$$f(x) = \frac{c}{a^2 + (x-b)^2}, \quad a > 0;\ b, x \in \mathbb{R}$$

10.6. Über das zufällige Geburtsgewicht neugeborener Jungen werde angenommen, dass es normalverteilt mit den Parametern $\mu = 3000$ und $\sigma^2 = 640000$ ist. Bestimmen und interpretieren Sie die $k\sigma$ - Intervalle, $k = 1, 2, 3$, dieser Verteilung. Diskutieren Sie die Eigenschaft $P((-\infty, 0)) > 0$ dieser Verteilung im gegebenem Zusammenhang.

10.7. Bei der Messung einer physikalischen Größe habe der zufällige Messfehler die Dichte

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & : & -1 \le x < 0 \\ -x+1 & : & 0 \le x < 1 \\ 0 & : & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Messwert um mehr als δ, $0 < \delta < 1$, vom wahren Wert der Größe abweicht?

10.8. Bestimmen Sie den Median der Exponentialverteilung mit dem Parameter λ, d.h. diejenige Stelle $\tilde{x}$ mit $F(\tilde{x}) = 0,5$.

10.9. Bestimmen Sie das kleinste Intervall der Gestalt $[0, a]$, dem die Exponentialverteilung mit dem Parameter λ eine Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,99 zuordnet.

10.10. Die Seitenlänge eines einem Kreis mit dem Radius r einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks sei a. Ein Punkt P der Kreislinie wird festgehalten und ein zweiter Punkt Q wird gemäß einer Gleichverteilung auf der Kreislinie zufällig ausgewählt. $\overline{PQ}$ ist eine Sehne des Kreises (mit welcher Wahrscheinlichkeit?). Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese zufällige Sehne länger als a?